ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option scientifique

Mathématiques I

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et l'on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ rapporté à sa base canonique.
On convient d'identifier un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et l'on pose $N(X) = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.
De même, on identifie tout endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Pour tout nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$, on considère la matrice réelle $A(\theta)$ d'ordre n définie par:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos\theta & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(La diagonale est donc composée d'éléments égaux à 2cosθ, la sous-diagonale et la sur-diagonale de -1 et tous les autres éléments de la matrice sont nuls).
Enfin, on convient de noter A la matrice $A(0)$ et I_n la matrice-identité d'ordre n.

Dans la partie I, on étudie les solutions de l'équation matricielle $AX = B$, où B est un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$, et on majore $N(X)$ en fonction de $N(B)$.
Dans la partie II, on met en œuvre les résultats obtenus pour approcher une fonction définie comme solution d'une équation.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.
On note $E(\theta)$ l'espace vectoriel des suites réelles (u_k) vérifiant pour tout entier k supérieur ou égal à 1 la relation: $u_{k+1} - 2\cos\theta u_k + u_{k-1} = 0$, et l'on désigne par $F(\theta)$ le sous-ensemble constitué des suites (u_k) de $E(\theta)$ telles que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$.
a) Expliciter une base de $E(\theta)$ en distinguant les trois cas $0 < \theta < \pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
Déterminer la suite $(s_k(\theta))$ de $E(\theta)$ telle que $s_0(\theta) = 0$, $s_1(\theta) = \sin(\theta)$ lorsque $0 < \theta < \pi$.
b) Montrer que $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$, puis déterminer $F(\theta)$ pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$.
c) On suppose $0 < \theta < \pi$. Montrer que $F(\theta)$ se réduit à la suite nulle si θ n'appartient pas à l'ensemble des réels de la forme $p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.
d) On suppose que $\theta = p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.
Vérifier que la suite $(s_k(\theta))$ appartient à $F(\theta)$ et en déduire la dimension de $F(\theta)$.

2°) Noyau de la matrice A(θ).
a) Soit X un vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
- A quelle condition sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartient-il au noyau de A(θ)?
- En déduire qu'un vecteur X appartient au noyau de A(θ) si et seulement s'il existe une suite (u_k) appartenant à F(θ) telle que $u_1 = x_1, u_2 = x_2, \ldots, u_n = x_n$.
b) En déduire le noyau de A(θ) en fonction des valeurs prises par θ dans $[0, \pi]$.
Pour quelles valeurs de θ dans $[0, \pi]$ la matrice A(θ) est-elle inversible?

3°) Valeurs propres de la matrice A.
a) Expliciter la matrice A = A(0), et montrer que ses valeurs propres sont réelles (on citera précisément le théorème utilisé).
b) Soit λ une valeur propre de la matrice A, et X un vecteur propre non nul associé. Expliciter le système d'équations $(A - \lambda I_n)X = 0$ puis, en considérant la $i^{ième}$ équation de ce système, où i est un entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$.
En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, existe un nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\lambda = 2(1-\cos\theta)$.
c) En déduire que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que l'on explicitera sous la forme $\lambda_p = 2(1-\cos\theta_p)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

4°) Vecteurs propres de la matrice A.
a) Expliciter le vecteur propre X_p associé à la valeur propre λ_p dont la première composante dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est égale à $\sin(p\pi/(n+1))$.
b) On considère deux entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$.
Montrer que ${}^tX_pAX_q = {}^tX_qAX_p$ (où ${}^tX$ désigne la transposée de la matrice-colonne X), puis, en évaluant les deux membres de cette égalité, prouver que ${}^tX_p X_q = 0$.
c) Calculer, pour $0 < \theta < \pi$, la somme $1 + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + \ldots + e^{2in\theta}$.
En déduire que la somme des carrés des composantes du vecteur X_p, où $1 \leq p \leq n$, est égale à $(n+1)/2$.
d) On note P la matrice d'ordre n dont les vecteurs-colonnes sont $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Montrer que la matrice P est symétrique et, à l'aide des résultats précédents, calculer P^2, puis en déduire l'expression de P^{-1} en fonction de P. Que vaut le produit $P^{-1}AP$?

5°) Etude de l'équation AX = B.
On donne un vecteur B de composantes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
a) Etablir que l'équation AX = B admet une solution X et une seule.
b) Soient dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ les vecteurs V de composantes 1, 1, ..., 1 et W de composantes $w_1, w_2, \ldots, w_n$, où W vérifie l'équation AW = V.
Montrer que les composantes de W sont données par $w_k = k(n+1-k)/2$, où $1 \leq k \leq n$.
En déterminant le maximum sur $[0, a]$ de la fonction $x \to x(a-x)$ (où a est un nombre réel strictement positif donné), établir que $N(W) \leq (n+1)^2/8$.
c) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que les réels $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont positifs et l'on note X la solution unique de l'équation AX = B.
- Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
En raisonnant par l'absurde, montrer, par considération de la $i^{ième}$ ligne du système d'équations AX = B, que i = 1 ou n.
- Montrer que les composantes de X sont toutes positives.
d) On pose Y = N(B)V - B et Z = N(B)V + B.
Déterminer le signe des composantes de Y et Z, puis en déduire que, si AX = B, on a pour $1 \leq k \leq n$: $|x_k| \leq N(B)w_k$
En déduire une majoration de N(X) en fonction de N(B) et de n.

PARTIE II

Etant donnés deux nombres réels a et b et une fonction g à valeurs réelles continue sur le segment [0, 1], on considère la fonction f de classe C^2 sur [0, 1] et vérifiant les trois conditions suivantes:

$f(0) = a$, $f(1) = b$ et, pour tout élément x de [0, 1], $f''(x) = g(x)$.

On se propose ici de déterminer des valeurs numériques approchées de f(x) où x désigne un nombre réel appartenant au segment [0, 1].

1°) Existence et unicité de la solution f.

a) Expliciter la dérivée seconde de la fonction L définie sur [0, 1] par:

$$L(x) = x\int_x^1 (t-1).g(t)dt + (x-1)\int_0^x t.g(t)dt.$$

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction f de classe C^2 sur [0, 1] et vérifiant les trois conditions suivantes:

$f(0) = a$, $f(1) = b$ et, pour tout réel x appartenant à [0, 1], $f''(x) = g(x)$.

Exprimer f en fonction de L.

2°) Approximation de f'' par différences finies.

Dans toute la suite du problème, on suppose la fonction g de classe C^2 sur [0, 1].

a) Etablir que la fonction f est de classe C^4 sur [0, 1].

b) On donne un nombre réel x dans]0, 1[et un nombre réel strictement positif h tel que $0 \leq x-h < x+h \leq 1$. Etablir à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à partir du point x sur les segments [x, x+h] et [x-h, x] que:

$$\left|\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - f''(x)\right| \leq \frac{M_2h^2}{12}$$

où M_2 désigne le maximum (dont on justifiera l'existence) de |g''| sur [0, 1].

Dans la suite, on convient donc d'approcher f''(x) par [f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]/h².

3°) Discrétisation de l'équation f'' = g, avec f(0) = a et f(1) = b.

On pose désormais $h = 1/(n+1)$ et l'on note $x_k = kh$ pour $0 \leq k \leq n+1$.

On se propose de calculer des approximations $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, en prenant bien entendu $y_0 = f(x_0) = a$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = b$.

A cet effet, on remplace les n équations $f''(x_k) = g(x_k)$ où $1 \leq k \leq n$ par les n équations:

$$\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = g(x_k).$$

a) Montrer que le vecteur Y de composantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est solution d'un système d'équations AX = B où B est un vecteur dont on précisera les composantes.

b) Etablir que le vecteur F de composantes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ vérifie $N[A(F-Y)] \leq M_2h^4/12$.

c) A l'aide des résultats de la partie I, en déduire en fonction de n et de M_2 une majoration de N(F-Y), erreur maximale commise en remplaçant $f(x_k)$ par y_k.

4°) Applications.

a) En déduire que, si g'' = 0, alors $y_k = f(x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) Préciser f lorsque g(x) = 1 pour $0 \leq x \leq 1$ et a = b = 0.

Retrouver ainsi le résultat de la question I.5.b).

c) Déterminer la solution du système d'équations AX = B lorsque B est le vecteur de composantes 1, 2, ... , n dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.